

双参数指数分布无失效数据的 新的修正极大似然估计

何 春

(广东工业大学 应用数学系, 广东 广州 510643)

摘要: 对双参数指数分布的无失效数据 (t_i, n_i) , 给出了参数 μ 和 σ 的新的修正极大似然估计, 从而可以得到无失效数据可靠度的估计. 最后, 结合实际问题进行计算.

关键词: 无失效数据; 修正极大似然估计; 双参数指数分布

中图分类号: O212.1

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2000)04-0103-04

引言

在可靠性试验中, 设产品的寿命 T 的分布函数为 $F(t, \theta)$, θ 为未知参数. 在定时试验中, 时间为 $t_i (i = 1, 2, 3, \dots, m)$, 相应试验样品数为 $n_i (i = 1, 2, 3, \dots, m)$, 结果所有样品无一失效, 记 $S_i = n_i + \dots + n_m$, 它表示在 t_i 时刻还未失效的样品数, 称 (t_i, n_i) 为无失效数据.

综上所述, 试验提供的信息可概括为:

- (1) 产品寿命 T 的分布函数为 $F(t, \theta)$, 简记为 $F(t)$;
- (2) $t = 0$ 时, 其失效概率为 $P_0 = P\{T < 0\} = 0$ (或近似为 0);
- (3) $S_i = n_i + \dots + n_m$, 即在 t_i 时刻有 S_i 个样品的寿命大于 t_i ;
- (4) $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$, 记 $P_i = P\{T < t_i\}$ 为 t_i 处的失效概率, 则有 $P_0 < P_1 < \dots < P_m$.

设产品的寿命 T 服从双参数指数分布, 其分布函数为

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\frac{t - \mu}{\sigma}\right], \quad (t \geq \mu). \quad (1)$$

文献[1]对式(1)中的参数 μ 和 σ 给出了修正的极大似然估计

$$\begin{cases} \mu = \max\left[t_i: t_i < \left(1 - \sum_{i=1}^m L_i\right) \sum_{i=1}^m n_i t_i / \left(\sum_{i=1}^m n_i - \sum_{i=1}^m L_i\right), 1 \leq i \leq m\right], \\ \sigma = \sum_{i=1}^m n_i (t_i - \mu) / \sum_{i=1}^m L_i. \end{cases} \quad (2)$$

本文将给出双参数指数分布式(1), 在无失效时参数 μ 和 σ 的新的修正的极大似然估计. 本文给出的 μ 和 σ 的修正极大似然估计比式(2)给出的要合理一些, 最后结合实际问题给出了数值例.

1 μ 和 σ 的修正的极大似然估计

对双参数指数分布式(1), 在无失效数据为 (t_i, n_i) 时 $(i = 1, \dots, m)$, 根据文献[2], 可得其

修正似然函数为:

$$L_M = \frac{C}{\sigma \sum_{i=1}^m L_i} \exp \left[-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m n_i (t_i - \mu) \right], \quad (3)$$

其中 C 为与 μ 和 σ 无关的常数, L_i 为拟累积失效数, $\sum_{i=1}^m L_i < 1$.

由此可得:

定理 1 对双参数指数分布式(1), 其无失效数据为 (t_i, n_i) 时 $(i = 1, \dots, m)$, 修正似然函数由式(3) 给出, 则 μ 和 σ 的新的修正的极大似然估计为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m n_i t_i P_i / \left(\sum_{i=1}^m n_i - \sum_{i=1}^m L_i \right); \\ \sigma = \sum_{i=1}^m n_i (t_i - \mu) / \sum_{i=1}^m L_i, \end{cases} \quad (4)$$

其中 P_i 为 $P_i = P\{T < t_i\}$ 的估计值.

证明: 对双参数指数分布式(1), 其无失效数据为 (t_i, n_i) 时 $(i = 1, \dots, m)$, 修正似然函数由式(3) 给出:

对式(3) 两边取对数, 则有

$$\ln L_M = \ln C - \left(\sum_{i=1}^m L_i \right) \ln \sigma - \left[\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m n_i (t_i - \mu) \right],$$

则有:

$$\frac{\partial \ln L_M}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m L_i + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m n_i (t_i - \mu),$$

令

$$\frac{\partial \ln L_M}{\partial \sigma} = 0, \text{ 解得: } \sigma = \sum_{i=1}^m n_i (t_i - \mu) / \sum_{i=1}^m L_i.$$

但

$$\frac{\partial \ln L_M}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m n_i \neq 0,$$

因此不能由修正似然方程来求 μ 的修正极大似然估计.

对双参数指数分布式(1), 其平均寿命为 $E(T) = \sigma + \mu$.

由于 $P_i = P(T < t_i)$ 为 t_i 时刻的失效率, 设 P_i 为 P_i 的估计值, 则有 $1 - P_i$ 为 t_i 时刻的无失效率的估计值.

从而, 令

$$E(T) = \sum_{i=1}^m n_i t_i (1 - P_i),$$

于是 μ 和 σ 的新的修正的极大似然估计 σ 和 μ 满足 $\sigma + \mu = \sum_{i=1}^m n_i t_i (1 - P_i)$,

从而

$$\sum_{i=1}^m n_i (t_i - \mu) / \sum_{i=1}^m L_i + \mu = \sum_{i=1}^m n_i t_i (1 - P_i),$$

由上式可得

$$\mu \left(\sum_{i=1}^m n_i - \sum_{i=1}^m L_i \right) / \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m n_i t_i P_i + \left(1 - \sum_{i=1}^m L_i \right) \sum_{i=1}^m n_i t_i / \sum_{i=1}^m L_i, \quad (5)$$

令

$$\left(1 - \sum_{i=1}^m L_i\right) / \sum_{i=1}^m L_i = \alpha_0, \text{ 则 } \sum_{i=1}^m L_i = \frac{1}{1 + \alpha_0},$$

从而由式(5) 得: $\mu = \sum_{i=1}^m n_i t_i (P_i + \alpha_0) / \left(\sum_{i=1}^m n_i - \sum_{i=1}^m L_i \right) \cdot \frac{1}{1 + \alpha_0}.$

当 α_0 很小时, 可以取 $\sum_{i=1}^m n_i t_i P_i / \left(\sum_{i=1}^m n_i - \sum_{i=1}^m L_i \right)$ 作为 μ 的值,

即:
$$\mu = \sum_{i=1}^m n_i t_i P_i / \left(\sum_{i=1}^m n_i - \sum_{i=1}^m L_i \right).$$

虽然这样定的 μ 未必能使 L_M 达到最大, 但能接近最大.

从而 μ 和 σ 的新的修正的极大似然估计为

$$\begin{cases} \mu = \sum_{i=1}^m n_i t_i P_i / \left(\sum_{i=1}^m n_i - \sum_{i=1}^m L_i \right), \\ \sigma = \sum_{i=1}^m n_i (t_i - \mu) / \sum_{i=1}^m L_i, \end{cases}$$

证毕.

2 数值例

文献[3] 中给出了某型号发动机的无失效数据, 如表 1(时间单位为 s).

参数 μ 和 σ 以及可靠度的估计方法如下:

表 1 某型号发动机的无失效数据

i	t_i	n_i
1	100. 18	3
2	109. 93	21
3	115. 01	2
4	130. 15	1
5	150. 00	3
6	179. 94	8
7	190. 36	1
8	250. 15	1
9	783. 00	4
10	949. 94	3
11	870. 03	1
12	909. 77	1
13	1450. 30	2

根据文献[2], $\sum_{i=1}^m L_i = \ln \frac{1}{\alpha}$ 起等效失效数的作用. 取 $\alpha = 0.5$ 时, $r = \ln \frac{1}{\alpha} = 0.6931$ 作为无效情况时的等效失效数.

文献[3] 中给出了 P_i 的经典估计为 $P_i = \frac{0.5}{S_i + 1} \quad (i = 1, \dots, m)$, 由式(4) 通过计算可以得到 $\mu, \sigma, \theta, R(t)$ 的估计值, 其中可靠度 $R(t) = \exp\left[-\frac{t - \mu}{\sigma}\right]$, 可靠度的估计为 $R(t) = \exp\left[-\frac{t - \mu}{\sigma}\right]$, $\theta = \mu + \sigma$ 的估计为 $\theta = \mu + \sigma$.

表 2 为本文中 $\mu, \sigma, \theta, R(t)$ 的估计值与文献[1] 中 $\mu, \sigma, \theta, R(t)$ 的估计值在 $\alpha = 0.5, 0.6$ 时的比较

表 2 本文方法与文[1] 方法中 $\mu, \sigma, \theta, R(1000)$ 的估计值的对比

参 数	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.6$	
	本文方法	文[1] 方法	本文方法	文[1] 方法
μ	21. 56	100. 18	21. 48	150. 00
σ	21442. 69	15317. 2520	29101. 68	15810. 2679
θ	21464. 25	15417. 432	29123. 16	15960. 2679
$R(1000)$	0. 95539	0. 942947	0. 96693	0. 947657

从本文的 μ 表达式可以看出, 无失效数据 (t_i, n_i) 对 μ 的影响大, 它们关系密切, 而 $\sum_{i=1}^m L_i$ 对 μ 的影响不是很大. 但无失效数据及 $\sum_{i=1}^m L_i$ 对 σ 的影响均大, 关系比较密切, 这些都是相对比较合理的.

以上的讨论是在 $P_i = \frac{0.5}{S_i + 1}$ 的情况下进行的. 文献[1] 是对 P_i 进行了改进

$$P_i = 1 - \frac{(S_i + 3)[1 - P_{i-1}]^{S_i+4} - (1 - \lambda_i)^{S_i+4}}{(S_i + 4)[1 - P_{i-1}]^{S_i+3} - (1 - \lambda_i)^{S_i+3}} \quad (i = 2, \dots, m),$$

而

$$\begin{cases} P_1 = 0.5 / (S_1 + 1); \\ \lambda_i = P_{i-1} t_i / t_{i-1} \quad (i = 2, \dots, m). \end{cases}$$

用这种改进了的 P_i 的值代入式(4), 也可以得到 μ , σ 以及 θ , $R(t)$ 的估计值, 其中 $\theta = \mu + \sigma$, $R(t) = \exp\left[-\frac{t - \mu}{\sigma}\right]$.

参考文献:

- [1] 韩明. 双参数指数分布无失效数据的参数估计[J]. 运筹与管理, 1998, 7(2): 27-36.
- [2] 王玲玲, 王炳兴. 无失效数据的统计分析——修正似然函数方法[J]. 数理统计与应用概率, 1996, 11(1): 64-70.
- [3] 茆诗松, 罗朝斌. 无失效数据的可靠性分析[J]. 数理统计与应用概率, 1989, 4(4): 489-506.

New Modified Maximum Likelihood Estimation of Parameter of Zero-failure data of Double-Parameter Exponential Distribution

HE Chun

(Dept. of Applied Mathematics, GDUT, Guangzhou 510643, China)

Abstract: New Modified maximum likelihood estimations of parameter μ and σ of zero-failure data of double-parameter exponential distribution are given. Calculation concerning practical problem is performed.

Key words: zero-failure data; Modified maximum likelihood estimation; double-parameter exponential distribution